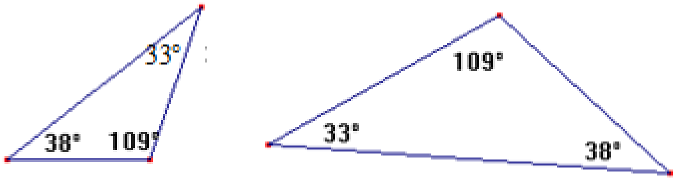
TRIANGLES SEMBLABLES

I. *DEFINITION*

Dire que deux triangles sont semblables signifie que les angles de l'un sont égaux aux angles de l'autre.
On dit aussi que les triangles sont de même forme.



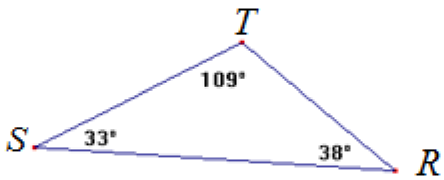
REMARQUE
Dans la suite, on respectera toujours l'ordre des lettres :

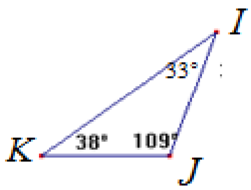
ABC et MNP sont semblables si :

$$\widehat{A} = \widehat{M}\ ;\quad \widehat{B} = \widehat{N}\ ;\quad \widehat{C} = \widehat{P}\ :$$

Les triangles IJK et STR sont semblables car

$\widehat{I} = \widehat{S} = 33°$
$\widehat{J} = \widehat{T} = 109°$
$\widehat{K} = \widehat{R} = 38°$



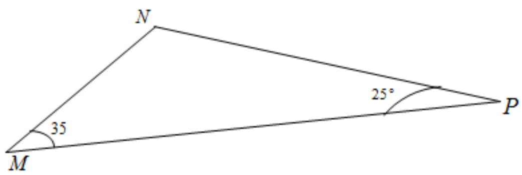


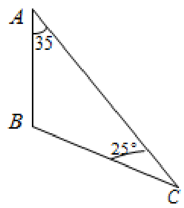
REMARQUE IMPORTANTE
Dans la pratique, il suffit que deux angles de l'un des triangles soient égaux à deux angles de l'autre triangle, puisque la somme des angles est égale à 180°.

EXEMPLE : *On considère les deux triangles suivants :*

On a :

$$\widehat{B} = 180 - \widehat{A} - \widehat{C} = 180 - 35 - 25 = 120°$$
$$\widehat{N} = 180 - \widehat{M} - \widehat{P} = 180 - 35 - 25 = 120°$$





On en déduit que $\widehat{A} = \widehat{M}$; $\widehat{B} = \widehat{N}$ et $\widehat{C} = \widehat{P}$ *donc les triangles ABC et MNP sont semblables.*

II. *CARACTERISATION DES TRIANGLES SEMBLABLES*

Si deux triangles sont semblables, alors les côtés opposés aux angles égaux sont proportionnels.

ABC et MNP deux triangles semblables, alors : $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{MP}{AC} = \dfrac{NP}{BC} = k$

DEFINITION : *k est appelé* ***rapport de similitude****.*

La réciproque de cette propriété est vraie (voir la diapositive suivante) :

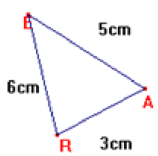
THEOREME :

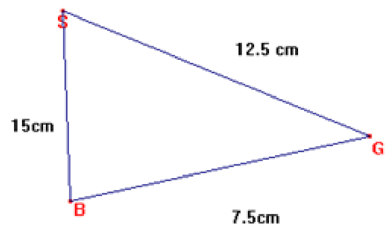
Si deux triangles ont leurs côtés proportionnels, alors ils sont semblables.

Plus précisément, si ABC et MNP sont deux triangles tels que : $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{MP}{AC} = \dfrac{NP}{BC} = k$ ***alors ils sont semblables.***

III. *REMARQUE :* *on peut en conclure que deux triangles sont de même forme* ***si, et seulement si****, leurs côtés sont proportionnels.*

EXEMPLE
Les triangles sont semblables car :
$12.5 / 5 = 2.5$; $7.5 / 3 = 2.5$ et $15 / 6 = 2.5$
donc les côtés sont proportionnels donc ils sont semblables.



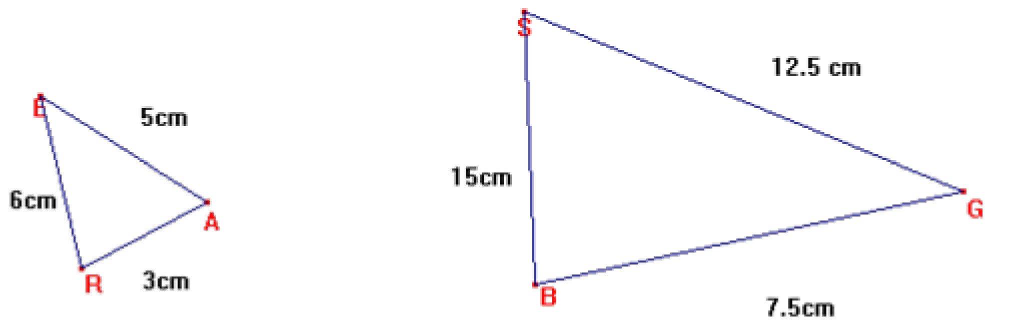


IV. AIRE ET SIMILITUDE

THEOREME :

Si k est le rapport de similitude du triangle ABC au triangle de même forme A'B'C', alors l'aire du triangle A'B'C' est égale à k² fois l'aire du triangle ABC.

EXEMPLE : *dans la figure de la diapositive précédente :*
Aire du triangle BSG = 2.5^2 x Aire du triangle AER



V. EXERCICES :

EXERCICES 1:

ABC est un triangle rectangle en A .

H est la projection orthogonal de A sur la droite (BC) .

1) *Démontrer que sont semblables AHC et AHB.*
2) *En déduire que :* $AH^2 = HB \times HC$ *et* $AB \times AC = AH \times BC$

EXERCICES 2:

ABC est un triangle isocèle de sommet A tel que : $AB = 5cm$ *et* $BC = 6$ *cm*

H est la projection orthogonal de A sur la droite (BC) et I est la projection orthogonal de H sur la droite (AB) .

1) *Démontrer que sont semblables ACH et AHI.*
2) *En déduire que :* $AH^2 = AC \times AI$