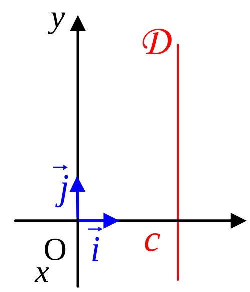
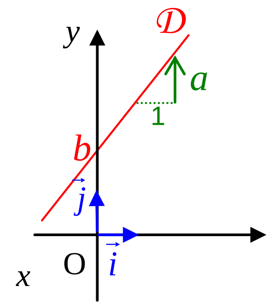
DROITES

I. Equation de droites

1. Caractérisation analytique d'une droite





Propriété :
Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.
Soit $(\mathcal{D})$ une droite du plan.

- Si $(\mathcal{D})$ est parallèle à l'axe des ordonnées :
alors l'équation de $(\mathcal{D})$ est de la forme $x = c$,
où c est un nombre réel.

- Si $(\mathcal{D})$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées :
alors l'équation de $(\mathcal{D})$ est de la forme $y = ax + b$,
où a et b sont deux nombres réels.

Vocabulaire :
a est appelé le coefficient directeur de la droite $\mathcal{D}$.
b est appelé l'ordonnée à l'origine de la droite $\mathcal{D}$.

Démonstration :
Soit $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ deux points distincts d'une droite $\mathcal{D}$.

Dire qu'un point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ appartient à la droite $\mathcal{D}$ revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

D'après la condition de colinéarité : $(x - x_A)(y_B - y_A) - (x_B - x_A)(y - y_A) = 0$.

- Si $(\mathcal{D})$ est parallèle à l'axe des ordonnées, alors $x_A = x_B$.
La condition de colinéarité peut s'écrire : $(x - x_A)(y_B - y_A) = 0$
Ce qui équivaut à $x = x_A$ car $y_A \neq y_B$, les points A et B étant distincts.
$(\mathcal{D})$ vérifie une équation de la forme $x = c$ avec $c = x_A$.

- Si $(\mathcal{D})$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, alors $x_A \neq x_B$.
La condition de colinéarité peut s'écrire : $\dfrac{y - y_A}{x - x_A} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

$(\mathcal{D})$ vérifie une équation de la forme $y = ax + b$ avec $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ et $b = y_A - \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} x_A$.

Exercice : Donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de chacune des droites d'équations : a) $y=-2x+3$ b) $y=5$ c) $4x+2y=1$

a) Coefficient directeur : -2
Ordonnée à l'origine : 3

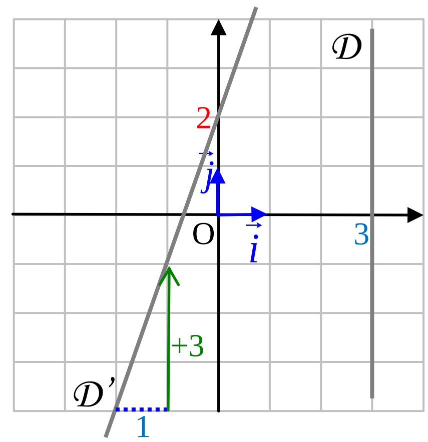
b) Coefficient directeur : 0
Ordonnée à l'origine : 5

b) L'équation peut s'écrire : $y=-2x+\frac{1}{2}$

Coefficient directeur : -2

Ordonnée à l'origine : $\frac{1}{2}$

Exemples :



La droite $\mathcal{D}$ a pour équation $x = 3$

La droite $\mathcal{D}$' a pour équation $y = 3x + 2$.

Son ordonnée à l'origine est 2 et son coefficient directeur est +3.

Méthode : Représenter graphiquement une droite d'équation donnée

Vidéo https://youtu.be/cUdhxkaTqgk

Soit (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère du plan.
Dans ce repère, tracer les droites d_1, d_2 et d_3 d'équations respectives :
$y = 2x + 3$,
$y = 4$,
$x = 3$.

- La droite d_1 d'équation $y = 2x + 3$ a pour ordonnée à l'origine 3. Donc le point A de coordonnée $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ appartient à la droite d_1.

Soit B le point d'abscisse -2 appartenant à la droite d_1. Les coordonnées de B vérifient l'équation de d_1, donc :
$y_B = 2 \times (-2) + 3 = -1$.

Le point B de coordonnées $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartient à la droite d_1.

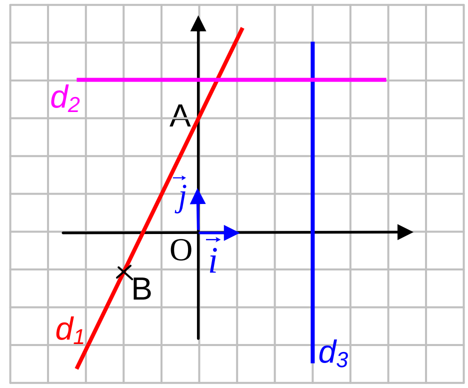
On peut ainsi tracer la droite d_1 passant par A et B.

- La droite d_2 d'équation $y = 4$ est l'ensemble des points dont l'ordonnée est égale à 4. La droite d_2 est donc la droite parallèle à l'axe des abscisses coupant l'axe des ordonnées au point de coordonnées $\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Pour tracer la droite d_2, on aurait également pu remarquer que son coefficient directeur est nul.

- La droite d_3 d'équation $x = 3$ est l'ensemble des points dont l'abscisse est égale à 3. La droite d_3 est donc la droite parallèle à l'axe des ordonnées coupant l'axe des abscisses au point de coordonnées $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. Conséquence :



Propriété :

Si $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ sont deux points distincts d'une droite $(\mathcal{D})$ tel que $x_A \neq x_B$ alors la droite $(\mathcal{D})$ a pour coefficient directeur $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

Méthode : Déterminer une équation de droite dont on connaît deux points

Vidéo https://youtu.be/tfagLy6QRuw

Soit (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère du plan.

Soit $A\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ deux points d'une droite d.

Déterminer une équation de la droite d.

Les points A et B sont d'abscisses différentes donc la droite d n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. Elle est donc de la forme $y = ax + b$, où a et b sont deux nombres réels.

Le coefficient directeur de d est $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{5-(-1)}{3-4} = \dfrac{6}{-1} = -6$

Comme $A\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ appartient à la droite d, ses coordonnées vérifient l'équation de d soit :

-1 = -6 x 4 + b.

D'où b = -1 + 6 x 4 = 23

Une équation de d est donc : $y = -6x + 23$.

Propriété réciproque :

Propriété :

Soit (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère du plan et a, b, c trois nombres réels, a étant non nul.

L'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ sont tels que :

$y = ax + b$ ou $x = c$, est une droite.

Méthode : Vérifier si un point appartient à une droite d'équation donnée

Vidéo https://youtu.be/XA0YajthETQ

Soit (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère du plan.

Les points $A\begin{pmatrix} 6,4 \\ 42 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 346 \\ 2419 \end{pmatrix}$ appartiennent-ils à la droite d d'équation $y = 7x - 3$?

- Dire que le point $A\begin{pmatrix}6,4\\42\end{pmatrix}$ appartient à la droite d d'équation $y = 7x - 3$ revient à dire que les coordonnées de A vérifient l'équation de la droite d.
Ce qui n'est pas le cas, puisque 42 ≠ 7 x 6,4 – 3 = 41,8.
Le point A n'appartient donc pas à la droite d.

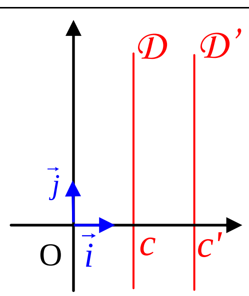
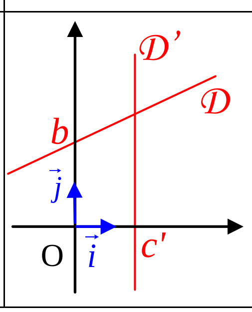
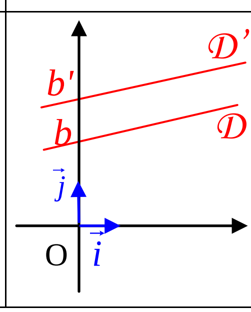
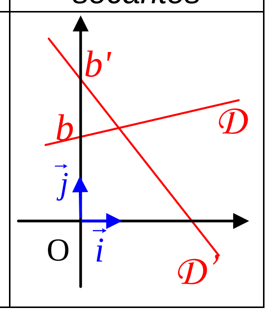
- Les coordonnées de $B\begin{pmatrix}346\\2419\end{pmatrix}$ vérifient l'équation de la droite d. En effet :
2419 = 7 x 346 – 3 donc le point B appartient à la droite d.

II. Position relative de deux droites

Propriété :
Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.
Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées.
Dire que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles entre-elles équivaut à dire qu'elles ont le même coefficient directeur.

Démonstration :
La droite $\mathcal{D}$ admet une équation du type $y = ax + b$.
La droite $\mathcal{D}'$ admet une équation du type $y = a'x + b'$.
Soit A et B deux points distincts de $\mathcal{D}$ d'abscisses respectives 0 et 1 alors
A et B ont pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\b\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\a+b\end{pmatrix}$.
De même, A' et B' deux points de $\mathcal{D}'$, ont pour coordonnées $\begin{pmatrix}0\\b'\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\a'+b'\end{pmatrix}$.
Dire que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont parallèles équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{A'B'}\begin{pmatrix}1\\a'\end{pmatrix}$ sont colinéaires, c'est-à-dire 1 x a' – 1 x a = 0, soit $a = a'$.

Tableau récapitulatif :

Equation de $\mathcal{D}$	$x = c$	$y = ax + b$	$y = ax + b$	
Equation de $\mathcal{D}'$	$x = c'$	$x = c'$	$y = a'x + b'$	
Position de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$	$\mathcal{D} // \mathcal{D}'$	$\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes	Si $a = a'$ $\mathcal{D} // \mathcal{D}'$	Si $a \neq a'$ $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont sécantes
Représentation				

Vidéo https://youtu.be/gTUPGw7Bulc

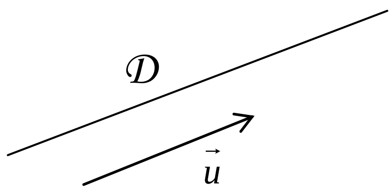
Exemples :
Dans un repère du plan, d_1, d_2 et d_3 admettent pour équations respectives :

$$y = 3x + 4,\quad y = 3x + 9,\quad x = 8$$

Les droites d_1 et d_2 sont parallèles car elles ont un coefficient directeur égal à 3.
Les droites d_1 et d_3 sont sécantes.

III. Vecteur directeur d'une droite

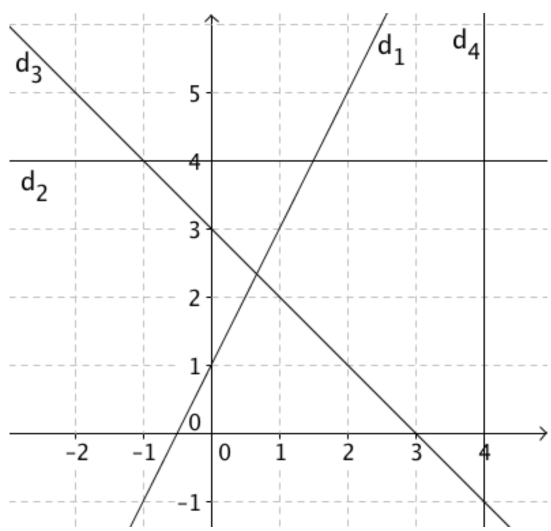
Définition :
$\mathcal{D}$ est une droite du plan.
On appelle vecteur directeur de $\mathcal{D}$ tout vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la même direction que la droite $\mathcal{D}$.



Méthode : Déterminer graphiquement un vecteur directeur d'une droite

Vidéo https://youtu.be/6VdSz-0QT4Y

Soit (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère du plan.
Donner des vecteurs directeurs des droites d_1, d_2, d_3 et d_4.



Pour d_1 : $\vec{a}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ *ou encore* $\vec{c}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$

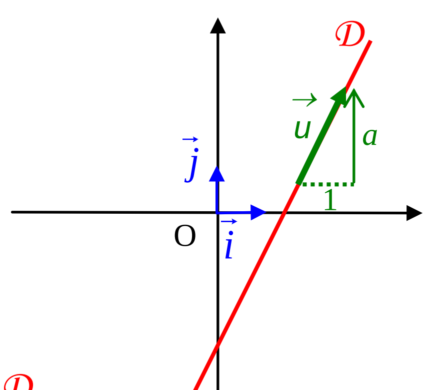
Pour d_2 : $\vec{d}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$

Pour d_3 : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$

Pour d_4 : $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ *ou encore* $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-8\end{pmatrix}$

Propriété :
Soit (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère du plan.
- Si $\mathcal{D}$ est parallèle à l'axe des ordonnées alors $\vec{j}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

- Si $\mathcal{D}$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, alors le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$, où $y = ax + b$ est une équation de la droite $\mathcal{D}$.



<u>Démonstration :</u>

La droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$ passe par les points A $\begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}$ et B$\begin{pmatrix} 1 \\ a+b \end{pmatrix}$.

Les points A et B étant distincts, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1-0 \\ a+b-b \end{pmatrix}$ soit $\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$.

<u>Exemple :</u>

La droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = -2x + 3$ admet le vecteur $\vec{u}$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ pour vecteur directeur.

Le vecteur $\vec{v}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ est également un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

<u>Méthode :</u> Déterminer une équation de droite dont on connaît un point et un vecteur directeur

***Vidéo** https://youtu.be/4NXgsUSKrrk*

Soit (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère du plan.

Soit A$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ un point d'une droite d admettant $\vec{u}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur.

Déterminer une équation de la droite d.

On considère un point M$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ de la droite d.

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ $\begin{pmatrix} x+3 \\ y-4 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont colinéaires. En effet, $\overrightarrow{AM}$ est également un vecteur directeur de d.

D'après le critère de colinéarité : -(x + 3) – 2(y – 4) = 0

Soit : -x – 3 – 2y + 8 = 0

Soit encore : -2y = x – 5

Une équation de d est : y = -0,5x + 2,5.

<u>Exercice 1</u>

Donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine des droites suivantes :

d_1 : y = 2x+1 d_2 : y = 5x-3 d_3 : y = -2x-7 d_4 : y = 7x d_5 : y = -5

<u>Exercice 2</u>

Même exercice :

d_1 : y + 3 = 5x d_2 : 3y = 9x-6 d_3 : x = -2y+1 d_4 : y = 7(x+5)

<u>Exercice 3</u>

Représenter dans un repère les droites suivantes :

d_1 : y = -3x+5 d_2 : y = 4x-2 d_2 : y = 5

<u>Exercice 4</u>

Soit d la droite d'équation y = 9x-11. Les points A(12 ; 97) et B(-6 ; 65) appartiennent-ils à la droite d ? Justifier.

<u>Exercice 5</u>

Soit d et d' les droites d'équation respective y = -3 et x = 3.

Parmi les points A(3 ; -3), B(3 ; 3), C(-3 ; 3) et D(-3 ; -3) lesquels appartiennent à la droite d ? à la droite d' ?

<u>Exercice 6</u>

Dans chaque cas, dire si les droites d_1 et d_2 sont parallèles.

a) $d_1 : y = 3x+5$ et $d_2 : y = 3x-2$ b) $d_1 : y = -3x+7$ et $d_2 : y = 3x+8$

c) $d_1 : y = 4x+1$ et $d_2 : y = 4x$ d) $d_1 : y = 5$ et $d_2 : y = 5x$

<u>Exercice 7</u>

Même exercice :

a) $d_1 : y = 2x+3$ et $d_2 : y = 3x+2$ b) $d_1 : y = 5x+1$ et $d_2 : y = 1+5x$

c) $d_1 : y = 5$ et $d_2 : y = 7$ d) $d_1 : x = 3$ et $d_2 : x = -1$

<u>Exercice 8</u>

Pour chacune des affirmations indiquer si elle est vraie ou fausse.

1) La droite d'équation y = 2 est parallèle à l'axe des ordonnées.

2) La droite d'équation y = x est parallèle à l'axe des abscisses.

3) Les droites d'équations y = x et y = -x sont parallèles.

4) Les droites d'équation y = 3 et x = 2 sont sécantes.

<u>Exercice 9</u>

1) Donner l'équation de la droite d_1 passant par le point A(0 ; 2) et parallèle à la droite d_2 d'équation y = -2x+5.

2) Donner l'équation de la droite d_3 passant par le point A(0 ; -1) et parallèle à l'axe des abscisses.

3) Donner l'équation de la droite d_4 passant par le point A(3 ; 2) et parallèle à l'axe des ordonnées.