EQUATIONS, INEQUATIONS

I. Résolution d'équations

1. Equation-produit

Définition :
Toute équation du type $P(x) \times Q(x) = 0$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions algébriques, est appelée équation-produit.

Remarque :
Nous rencontrerons plus particulièrement des équations produits de la forme :$(ax + b)(cx + d) = 0$.

Propriétés :
- Dire qu'un produit de facteurs est nul, équivaut à dire que l'un au moins des facteurs est nul.
- Le cas particulier de l'équation-produit $(ax + b)(cx + d) = 0$ équivaut à
  $ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$.

Méthode : Résoudre une équation en se ramenant à une équation-produit

Vidéo https://youtu.be/EFgwA5f6-40
Vidéo https://youtu.be/sMvrUMUES3s

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :
1) $(3x + 1)(1 - 6x) - (3x + 7)(3x + 1) = 0$ 2) $5x^2 - 4x = 0$

1) On commence par factoriser l'expression pour se ramener à une équation-produit :
$(3x + 1)(1 - 6x) - (3x + 7)(3x + 1) = 0$
$(3x + 1)[(1 - 6x) - (3x + 7)] = 0$
$(3x + 1)(1 - 6x - 3x - 7) = 0$
$(3x + 1)(-9x - 6) = 0$

Soit : $3x + 1 = 0$ ou $-9x - 6 = 0$
$3x = -1$ ou $-9x = 6$
$x = -\dfrac{1}{3}$ ou $x = \dfrac{6}{-9} = -\dfrac{2}{3}$

Les solutions sont donc $-\dfrac{2}{3}$ et $-\dfrac{1}{3}$.

2) $5x^2 - 4x = 0$ d'ou $x(5x - 4) = 0$ Soit : $x = 0$

ou $5x - 4 = 0$ d'ou $5x = 4$ Soit : $x = \dfrac{4}{5}$

Les solutions sont donc 0 et $\dfrac{4}{5}$.

Equation de la forme $x^2 = a$

Propriété :
Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 = a$ dépendent du signe de a.
Si $a < 0$, alors l'équation n'a pas de solution.
Si $a = 0$, alors l'équation possède une unique solution qui est 0.
Si $a > 0$, alors l'équation possède deux solutions qui sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Démonstration :

- Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution car un carré est positif.
- Si $a = 0$, alors l'équation s'écrit $x^2 = 0$ donc $x = 0$.
- Si $a > 0$: $x^2 = a$ équivaut à : $x^2 - a = 0$ Soit $\left(x-\sqrt{a}\right)\left(x+\sqrt{a}\right)=0$

  $d'ou\ x-\sqrt{a}=0 \quad ou \quad x+\sqrt{a}=0\ soit\ x=\sqrt{a}\ ou\ x=-\sqrt{a}$

Exemples :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $x^2 = 16$, $x^2 = -8$ et $(x+2)^2 = 9$

- L'équation $x^2 = 16$.

16 est positif donc l'équation admet deux solutions $\sqrt{16} = 4$ et $-\sqrt{16} = -4$.

- L'équation $x^2 = -8$.

  -8 est négatif donc l'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
- L'équation $(x+2)^2 = 9$. On a alors $x+2=3$ ou $x+2=-3$.

  L'équation admet deux solutions $x=3-2=1$ et $x=-3-2=-5$.

2. Equation-quotient

Définition :

Toute équation du type $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ = 0, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions algébriques (avec $Q(x) \neq 0$), est appelée équation-quotient.

Propriété :

Pour tout x qui n'annule pas l'expression $Q(x)$, l'équation-quotient $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ = 0 équivaut à $P(x)$ = 0.

Exemple :

L'équation $\dfrac{x+2}{x+3}$ = 0 a pour solution x = -2.

Méthode : Résoudre une équation en se ramenant à une équation-quotient

Vidéo https://youtu.be/zhY1HD4oLHg
Vidéo https://youtu.be/OtGN4HHwEek

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $\dfrac{3x+5}{x-1}=0$ b) $\dfrac{(2x+1)(x-3)}{x-4}=0$ c) $\dfrac{x^2-9}{x+3}=0$

d) $1-\dfrac{x+3}{x-3}=\dfrac{2}{2-x}$

a) L'équation n'est pas définie pour x = 1.

Pour $x \neq 1$, l'équation $\dfrac{3x+5}{x-1}=0$ équivaut à : $3x+5=0$.

D'où $x=-\dfrac{5}{3}$.

b) L'équation n'est pas définie pour $x = 4$.

Pour $x \neq 4$, l'équation $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4}=0$ équivaut à : $(2x+1)(x-3)=0$.

Soit : $2x+1=0$ ou $x-3=0$

Les solutions sont : $x=-\frac{1}{2}$ et $x=3$.

c) L'équation n'est pas définie pour $x = -3$.

Pour $x \neq -3$, l'équation $\frac{x^2-9}{x+3}=0$ équivaut à : $x^2-9=0$, soit $x^2=9$

Soit encore : $x=3$ ou $x=-3$.

Comme $x \neq -3$, l'équation a pour unique solution : $x=3$.

d) L'équation n'est pas définie pour $x = 2$ et $x = 3$.

Pour $x \neq 2$ et $x \neq 3$, l'équation $1-\frac{x+3}{x-3}=\frac{2}{2-x}$ équivaut à :

$$1-\frac{x+3}{x-3}-\frac{2}{2-x}=0$$

On réduit au même dénominateur dans le but de se ramener à une équation-quotient :

$$\frac{(x-3)(2-x)}{(x-3)(2-x)}-\frac{(x+3)(2-x)}{(x-3)(2-x)}-\frac{2(x-3)}{(x-3)(2-x)}=0$$

$$\frac{(x-3)(2-x)-(x+3)(2-x)-2(x-3)}{(x-3)(2-x)}=0$$

On développe et on réduit le numérateur :

$$\frac{2x-x^2-6+3x-2x+x^2-6+3x-2x+6}{(x-3)(2-x)}=0$$

$$\frac{4x-6}{(x-3)(2-x)}=0$$

Ce qui équivaut à $4x - 6 = 0$ et $(x-3)(2-x)\neq 0$

D'où $x=\frac{3}{2}$.

II. Tableaux de signes

1) Exemple d'introduction

a) Compléter le tableau de valeurs suivant de l'expression $2x - 10$:

x	-10	-5	0	1	6	7	10	100
$2x - 10$								

b) Compléter alors la 2e ligne du tableau de signes de l'expression $2x - 10$:

x	$-\infty$		?		$+\infty$
$2x - 10$		…	0	…	

c) Pour quelle valeur x de l'expression $2x - 10$ s'annule-t-elle ?
Compléter alors la 1ère ligne du tableau de signes.

d) Vérifier à l'aide d'une calculatrice graphique.

a)

x	-10	-5	0	1	6	7	10	100
$2x - 10$	-30	-20	-10	-8	2	4	10	190

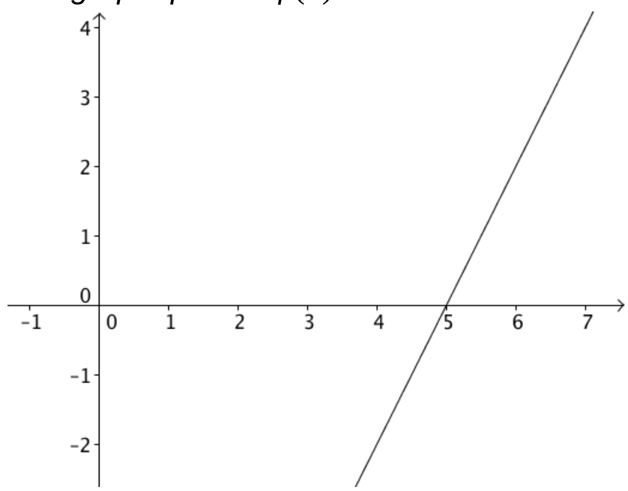
b)

x	- ¥		?		+¥
$2x - 10$		-	0	+	

c) $2x - 10 = 0$ soit $2x = 10$ soit encore $x = 5$.

x	- ¥		5		+¥
$2x - 10$		-	0	+	

d) On trace la représentation graphique de $f(x) = 2x - 10$.



2) <u>Généralisation</u>

On considère a et b deux nombres fixés ($a \neq 0$) et x est un nombre réel.
Soit la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

Déterminons l'abscisse x du point d'intersection de la droite représentative de f dans un repère avec l'axe des abscisses :

Cela revient à résoudre l'équation $f(x) = 0$.

soit : $ax + b = 0$,

soit : $ax = - b$,

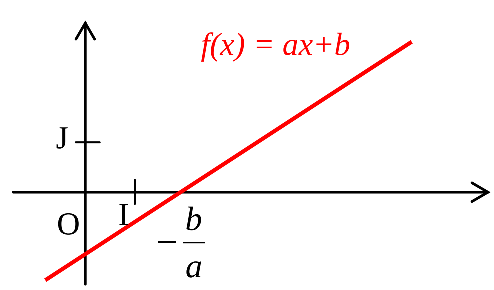
soit encore $x = -\frac{b}{a}$.

<u>Si a > 0 :</u>

La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

On obtient le tableau de signes suivant pour $ax+b$:

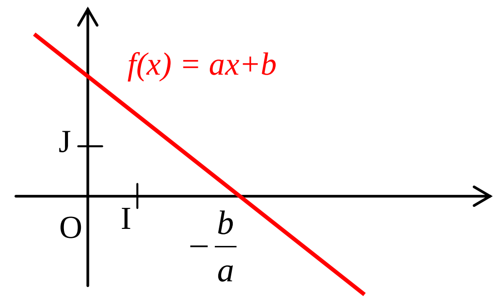
x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		-	0	+	



Si a < 0 :

La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
On obtient le tableau de signes suivant pour $ax+b$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		+	0	-	



Méthode : Déterminer le signe d'une expression du type ax + b

Vidéo https://youtu.be/50CByVTP4ig

1) Déterminer le tableau de signes de l'expression 2x + 6, où x est un nombre réel.
Le coefficient devant « x » est positif, donc on a le tableau :

x	- ¥		-3		+¥
$+2x + 6$		–	0	+	

2x + 6 = 0 pour x = -3. ⇑

2) Déterminer le tableau de signes de l'expression -3x + 12, où x est un nombre réel.
Le coefficient devant « x » est négatif, donc on a le tableau :

x	- ¥		4		+¥
$-3x + 12$		+	0	–	

-3x + 12 = 0 pour x = 4. ⇑

III. Résolution d'inéquations

En étudiant le signe d'un produit

Méthode : Résoudre une inéquation en étudiant le signe d'un produit

Vidéo https://youtu.be/qoNLr9NkvUE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(3-6x)(x+2)>0$

Le signe de $(3-6x)(x+2)$ *dépend du signe de chaque facteur 3 – 6x et x + 2.*

3 – 6x = 0 ou x + 2 = 0
6x = 3 x = -2

$x=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

Résumons dans un même tableau de signes les résultats pour les deux facteurs.
En appliquant la règle des signes, on en déduit le signe du produit $(3-6x)(x+2)$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$3-6x$		+		+	0	-	
$x+2$		-	0	+		+	
$(3-6x)(x+2)$		-	0	+	0	-	

On en déduit que $(3-6x)(x+2)>0$ *pour* $x\in\left]-2;\frac{1}{2}\right[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(3-6x)(x+2)>0$ *est* $\left]-2;\frac{1}{2}\right[$.

<u>*En étudiant le signe d'un quotient*</u>

<u>Méthode :</u> Résoudre une inéquation en étudiant le signe d'un quotient

Vidéo **https://youtu.be/Vitm29q8AEs**

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'inéquation suivante :* $\frac{2-6x}{3x-2}\leq 0$.

L'équation n'est pas définie pour 3x – 2 = 0, soit $x=\frac{2}{3}$.

Il faudra éventuellement exclure cette valeur de l'ensemble des solutions.

Le signe de $\frac{2-6x}{3x-2}$ *dépend du signe des expressions* $2-6x$ *et* $3x-2$.

$2-6x$ *= 0 équivaut à* $x=\frac{1}{3}$.

Résumons dans un même tableau de signes les résultats pour les deux expressions.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$2-6x$		+	0	-		-	
$3x-2$		-		-	0	+	
$\frac{2-6x}{3x-2}$		-	0	+	||	-	

La double-barre dans le tableau signifie que le quotient n'est pas défini pour x = $\frac{2}{3}$.

On en déduit que $\frac{2-6x}{3x-2}\leq 0$ *pour* $x\in\left]-\infty;\frac{1}{3}\right]\cup\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{2-6x}{3x-2}\leq 0$ *est* $\left]-\infty;\frac{1}{3}\right]\cup\left]\frac{2}{3};+\infty\right[$.

<u>Exercice 1</u>

1) $x+7=4$

2) $2x-8x-4=8x+6-7+4x$

3) $3x=9$

4) $-(x+5)=5(1-2x)$

5) $8x=4$

6) $9x-7x+5-9x=6-4x+8x$

7) $\frac{8}{7}x=14$

8) $6(3y-5)=-(-5-y)$

9) $12x=48$

10) $7x-2x+2x-9+7x=14x$

11) $\frac{x}{2}=25$

12) $-(18-x)+7(3x+5)=-(2-4x)$

Exercice 2

$a)\ (3x+6)(3x-1)-(3x+6)(2x-4)=0$ $\quad$ $c)\ (-x+3)(2x-1)+(-x+3)(x-7)=0$

$b)\ (x-5)(5x+1)+(x-5)(5x+10)=0$ $\quad$ $d)\ (4x+8)(-x+4)-(4x+8)(x+5)=0$

Exercice 3

Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2 = 49$ ***b.*** $x^2 = 6$
c. $x^2 = -16$ ***d.*** $x^2 - 53 = -4$
e. $(x + 1)^2 = 4$ ***f.*** $(x - 2)^2 - 14 = 2$

Exercice 4

Résoudre les équations suivantes :

a. $x^2 = 121$ ***b.*** $x^2 = 11$
c. $x^2 = -9$ ***d.*** $x^2 + 5 = 30$
e. $(x + 5)^2 = 49$ ***f.*** $(x - 4)^2 + 1 = 2$

Exercice 5

Résoudre les équations-quotients suivantes :

a. $\dfrac{3x-3}{x+1}=0$ ***b.*** $\dfrac{4-x}{x-3}=0$

c. $\dfrac{5x-2}{x^2+1}=0$ ***d.*** $\dfrac{-7x+1}{2-4x}=0$

Exercice 6

Résoudre les équations-quotients suivantes.

a. $\dfrac{(x-3)(x+1)}{x-3}=0$ ***b.*** $\dfrac{(2-x)(x-6)}{x-8}=0$ ***c.*** $\dfrac{(2x-4)(x-6)}{3x+1}=0$ ***d.*** $\dfrac{(-7x+7)(4x-6)}{8-x^2}=0$

Exercice 7

Résoudre les équations suivantes :

a. $\dfrac{x+1}{x+2}-2=0$ ***b.*** $\dfrac{2x-1}{x+6}+1=0$

c. $\dfrac{x-1}{3x+2}=3$ ***d.*** $\dfrac{x-1}{2-2x}=-1$

Exercice 8

Résoudre les équations suivantes :

a. $\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{1}{x}=0$ ***b.*** $\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x-1}=0$

c. $\dfrac{1}{2x-1}=\dfrac{2}{x-4}$ ***d.*** $\dfrac{4}{3x+3}=\dfrac{2}{2-x}$

Exercice 9

Résoudre, à l'aide d'un tableau de signes, les inéquations suivantes :

a. $(x - 3)(x - 1) \leq 0$ ***b.*** $(x - 9)(x - 5) < 0$
c. $(2x + 4)(3x - 3) \geq 0$ ***d.*** $(15 - 5x)(x + 1) > 0$

Exercice 10

Résoudre, à l'aide d'un tableau de signes, les inéquations suivantes :

a. $(3x - 4)(x + 7) > 0$ ***b.*** $(2x - 8)(10x + 5) < 0$
c. $(2 - x)(6x + 3) \geq 0$ ***d.*** $(7 - x)(6x + 18) \leq 0$

Exercice 11

Résoudre, à l'aide d'un tableau de signes, les inéquations suivantes :

a. $\dfrac{x-3}{x+1}\leq 0$ ***b.*** $\dfrac{x+4}{x-6}>0$

c. $\dfrac{3x-6}{x-5}\leq 0$ ***d.*** $\dfrac{2x-9}{1-x}\geq 0$

Exercice 12

Résoudre, à l'aide d'un tableau de signes, les inéquations suivantes :

a. $\dfrac{2x+8}{x-9}>0$ ***b.*** $\dfrac{6x+1}{7-x}\geq 0$

c. $\dfrac{x+5}{3x-5}\leq 0$ ***d.*** $\dfrac{-2x-10}{4-3x}\geq 0$