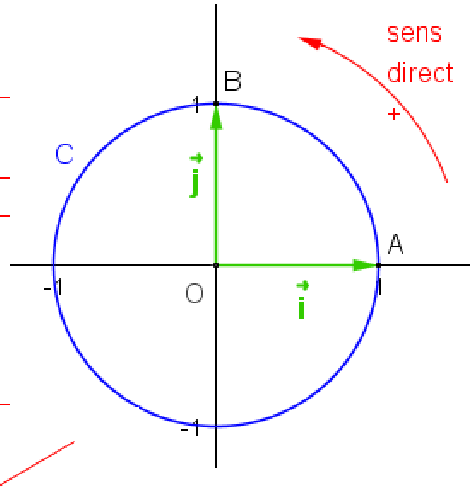
TRIGONOMETRIE

I. Le cercle trigonométrique

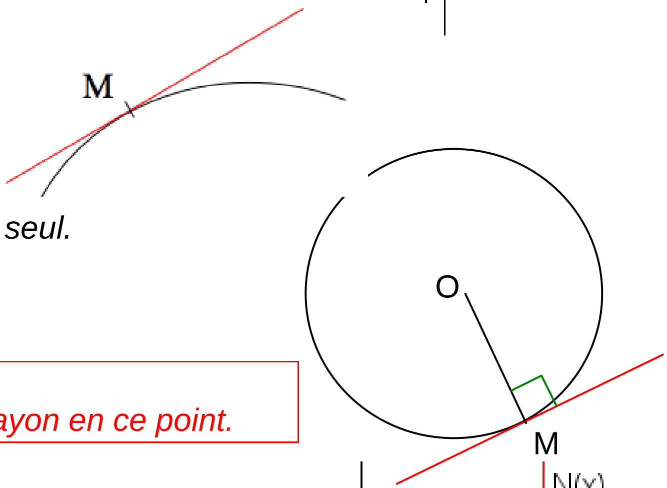


Définition : Sur un cercle, on appelle sens direct, sens positif ou sens trigonométrique le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Définition :
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ et orienté dans le sens direct, le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1.

II. Enroulement de la droite numérique

1) Tangente à un cercle

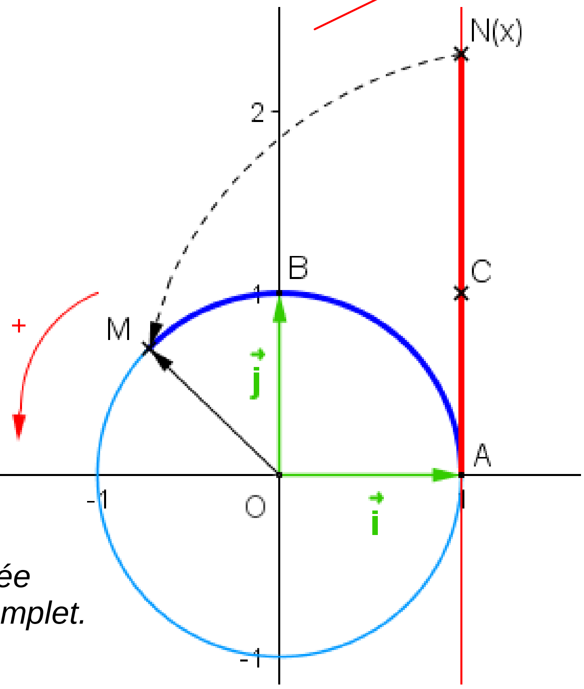


C'est une droite qui « touche » le cercle en un point et un seul.

Vidéo https://youtu.be/O-5yCePDlKY

Propriété :
La tangente en M au cercle C est la perpendiculaire au rayon en ce point.

2) Définition de l'enroulement



Dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$, on considère le cercle trigonométrique et une droite (AC) tangente au cercle en A et orientée telle que $\left(A\,;\vec{j}\right)$ soit un repère de la droite.
Si l'on « enroule » la droite autour du cercle, on associe à tout point N d'abscisse x de la droite orientée un unique point M du cercle.
La longueur de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ est ainsi égale à la longueur AN.

3) Correspondance entre abscisse et angle

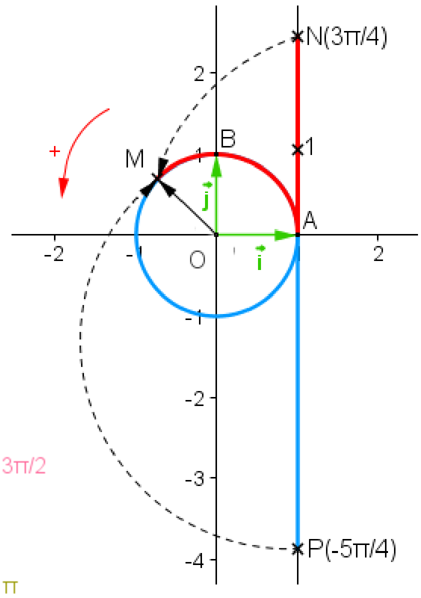
La longueur du cercle trigonométrique est égale à 2π.
En effet, son rayon est 1 donc P = $2\pi R = 2\pi \times 1 = 2\pi$
Après enroulement, le point N d'abscisse 2π sur la droite orientée se trouve donc en A sur le cercle. Cela correspond à un tour complet.

Ainsi au nombre réel 2π (abscisse de N sur la droite orientée) on fait correspondre un angle de 360° (mesure de $A\hat{O}M$).

Par proportionnalité, on obtient les correspondances suivantes :

Abscisse du point N sur la droite orientée	-2π	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
Angle AOM en degré	-360°	-180°	-90°	-45°	0°	45°	90°	180°	360°

4) Plusieurs abscisses pour un seul point



A plusieurs points de la droite orientée on peut faire correspondre un même point du cercle.
La droite orientée peut en effet s'enrouler plusieurs fois autour du cercle.

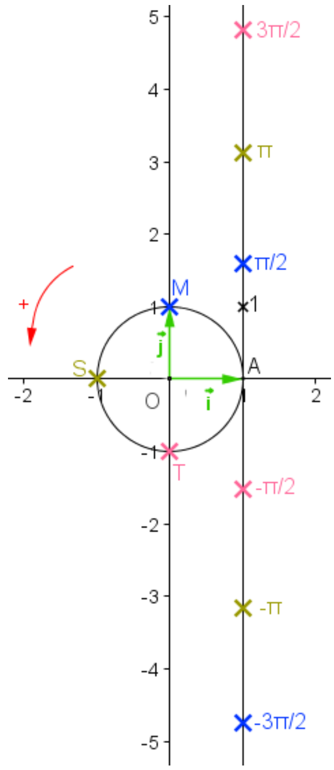
Exemples :

Ci-contre, les points N et P d'abscisses $\frac{3\pi}{4}$ et $\frac{-5\pi}{4}$ correspondent tous les deux au point M.

Les points de la droite orientée d'abscisses $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{3\pi}{2}$ correspondent tous les deux au point M du cercle trigonométrique.

Les points de la droite orientée d'abscisses π et $-\pi$ correspondent tous les deux au point S du cercle trigonométrique.

Les points de la droite orientée d'abscisses $\frac{3\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ correspondent tous les deux au point T du cercle trigonométrique.



Méthode : Déterminer un point défini par enroulement autour du cercle trigonométrique

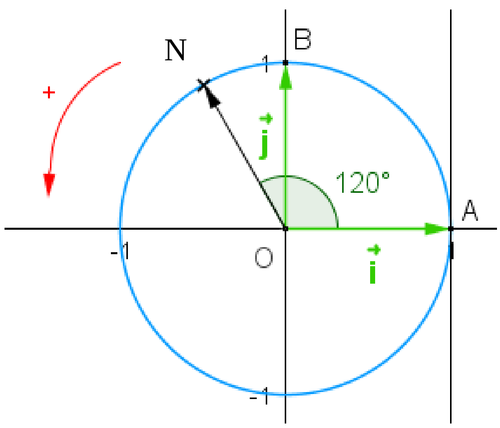
Vidéo https://youtu.be/Fk_YO30jXn8
Vidéo https://youtu.be/NpcTSa6pwk8

1) On enroule la droite orientée des réels sur le cercle trigonométrique de centre O.
Déterminer le point M du cercle associé au réel $\frac{9\pi}{4}$ dans cet enroulement.
2) Placer sur le cercle trigonométrique le point N correspondants à l'angle 480°.

1) $\frac{9\pi}{4}=\frac{8\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=2\pi+\frac{\pi}{4}$

L'enroulement effectué correspond à un tour complet du disque (2π) suivi d'un huitième de tour ($\frac{\pi}{4}$).

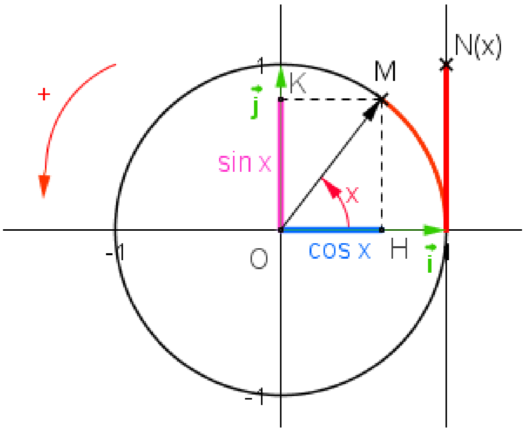
Le point M se trouve donc sur le cercle trigonométrique tel que $A\hat{O}M = 45°$.
2) 480° = 360° + 120°
Le point N se trouve donc sur le cercle trigonométrique tel que $A\hat{O}N = 120°$.



III. sinus et cosinus d'un nombre réel

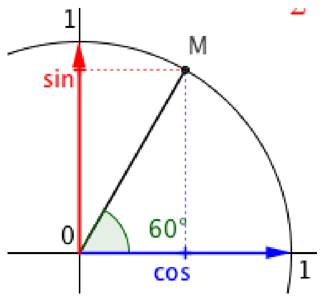
1) Définitions :

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i}\,;\vec{j}\right)$ et orienté dans le sens direct, on considère un cercle trigonométrique de centre O et de rayon 1.
Pour tout nombre réel x, considérons le point N de la droite orientée d'abscisse x.
À ce point, on fait correspondre un point M sur le cercle trigonométrique.
On appelle H et K les pieds respectifs des perpendiculaires à l'axe des abscisses et à l'axe des ordonnées passant par M.



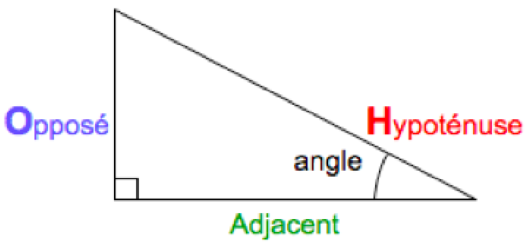
Définitions :
*Le cosinus du nombre réel x est l'abscisse de M et on note **cos x**.*
*Le sinus du nombre réel x est l'ordonnée de M et on note **sin x**.*

Exemple :
On lit sur l'axe des abscisse : cos 60° = 0,5.



2) Lien avec la trigonométrie vue dans le triangle rectangle :

Rappel :
Dans un triangle rectangle :



Sin (angle) = $\dfrac{\text{Opposé}}{\text{Hypoténuse}}$

Cos (angle) = $\dfrac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}}$

Tan (angle) = $\dfrac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}}$

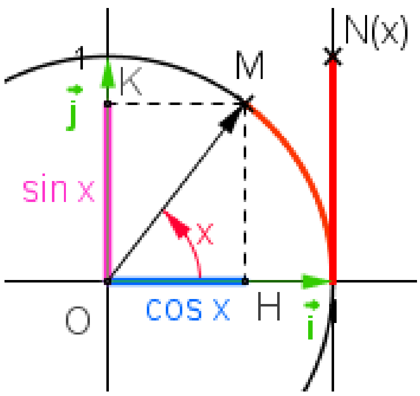
Ainsi dans le triangle OHM rectangle en H, on a :

$$\cos x = \frac{OH}{OM}$$

Or OM =1, donc :

$$OH = \cos x$$

cos x est donc l'abscisse de M.



On a également :

$$\sin x = \frac{MH}{OM} = \frac{OK}{OM} = OK$$

sin x est donc l'ordonnée de M.

3) Valeurs particulières :

Valeurs remarquables des fonctions sinus et cosinus à connaître :

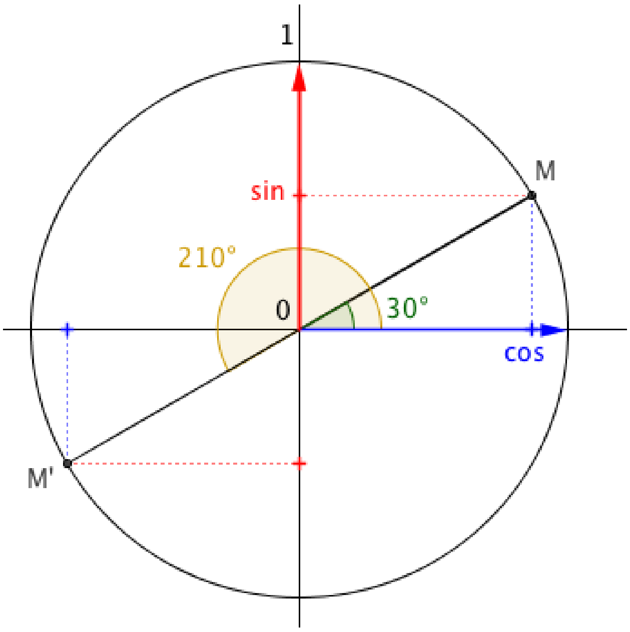
x	*0°*	*30°*	*45°*	*60°*	*90°*
$\sin x$	*0*	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	*1*
$\cos x$	*1*	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	*0*

Vidéo https://youtu.be/1l3SzSamBRk

Exemple :
A partir des valeurs particulières connues, trouver par symétrie le sinus et le cosinus de l'angle 210°.

cos(210°) = -cos(30°) = $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

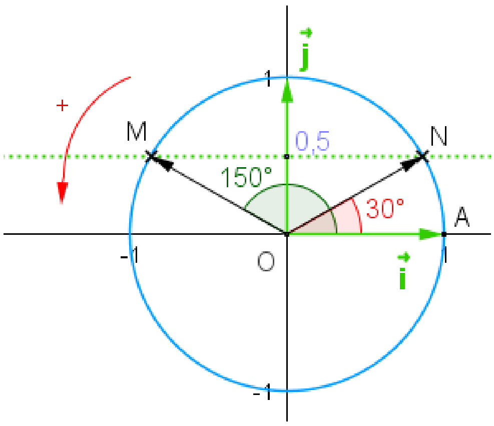
sin(210°) = -sin(30°) = $-\frac{1}{2}$



Méthode : Résoudre une équation trigonométrique

Vidéo https://youtu.be/VbfA7HGIeLw

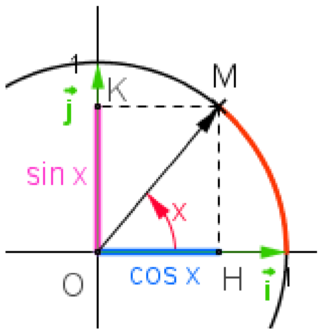
Pour x compris entre 0° et 180°, résoudre l'équation suivante :
sin x = 0,5.



On trace la parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point d'ordonnée 0,5.
Sur le cercle trigonométrique, on peut lire pour 0° ≤ x ≤ 180° les points correspondants à sin x = 0,5.
Il s'agit des points M et N tel que :
$A\hat{O}M = 150°$ *et* $A\hat{O}N = 30°$

Ainsi x = 30° ou x = 150°

4) Propriétés :



Propriétés : Pour tout nombre réel x, on a :
1) $-1 \leq \sin x \leq 1$ *et* $-1 \leq \cos x \leq 1$
2) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
3) $\sin(-x) = -\sin x$ *et* $\cos(-x) = \cos x$

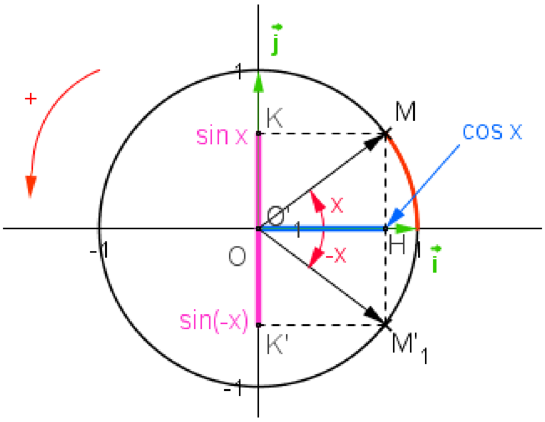
<u>Remarque :</u> $(\sin x)^2$, par exemple, se note $\sin^2 x$.

<u>Démonstrations :</u>

1) Le cercle trigonométrique est de rayon 1 donc :
$-1 \leq \sin x \leq 1$ et $-1 \leq \cos x \leq 1$.

2) Dans le triangle OHM rectangle en H, le théorème de Pythagore permet d'établir que :
$\cos^2 x + \sin^2 x = OM^2 = 1$.

3) Les angles de mesures x et $-x$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses donc :
$\sin(-x) = -\sin x$ et $\cos(-x) = \cos x$.



<u>Méthode :</u> Calculer le cosinus d'un angle connaissant son sinus

Vidéo https://youtu.be/VfzFIEId56A

Soit x un nombre réel. Calculer $\cos x$ sachant que $\sin x = \frac{3}{5}$.

On sait que $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, soit :

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$.

Soit encore :

$\cos x = \frac{4}{5}$ ou $\cos x = -\frac{4}{5}$.

<u>Exercice 1</u>

Pour x compris entre 0° et 360°, résoudre les équations suivantes :

a) $\sin x = -0,5$ b) $\sin x = 1$ c) $\sin x = -1$ d) $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

<u>Exercice 2</u>

Pour x compris entre 0° et 360°, résoudre les équations suivantes :

a) $\cos x = -1$ b) $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\cos x = 2$ d) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

<u>Exercice 3</u>

Pour x compris entre 0° et 360°, résoudre les équations suivantes :

a) $\cos x = 0,5$ b) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $\sin x = -1,1$