

## I. COMPARAISON DE DEUX NOMBRES RATIONNELS.

### 1) Règle 1 :

*a et b désignent deux nombres rationnels*  
*Si  $a \leq b$  alors  $a - b \leq 0$ .*  
*Si  $a \geq b$  alors  $a - b \geq 0$ .*

### 2) remarque:

Comparer deux nombres rationnels, revient à étudier le signe de leur différence :

### 3) Exemple 1 : Comparons $a = \frac{4}{5}$ et $b = \frac{6}{7}$

$$\text{On a : } a - b = \frac{4}{5} - \frac{6}{7} = \frac{28 - 30}{35} = -\frac{2}{35} .$$

Puisque  $-\frac{2}{35} < 0$  donc  $a - b < 0$  d'où  $a < b$  .

### 4) Exemple 2 : Comparons $x$ et $y$ deux rationnels : tel que $x = y + 3$

On a  $x - y = 3$  puisque  $3 > 0$  donc  $x - y > 0$  d'où  $x > y$

### 5) Exemple 3 : Comparons $a = \frac{4}{3}$ et $b = \frac{5}{2}$

$$\text{On a } b - a = \frac{5}{2} - \frac{4}{3} = \frac{15 - 8}{6} = \frac{7}{6} > 0 : \text{ donc } b - a > 0 \text{ d'où } b > a$$

## II. ORDRE ET OPERATIONS.

### 1) Ordre et addition (soustraction).

#### Règle 2 :

*Soit les nombres a, b, c et d*  
*Si  $a \leq b$  alors  $a + c \leq b + c$*   
*Si  $a \leq b$  alors  $a - c \leq b - c$*   
*Si  $a \leq b$  et  $c \leq d$  donc  $a + c \leq b + d$*

Exemple : soit  $x$  un rationnel tel que :  $x \geq 2$  comparons  $-2$  et  $x - 2$  .

On a  $x \geq 2$  donc  $x - 2 \geq 2 - 2$  soit  $x - 2 \geq 0$  donc  $x - 2 \geq -2$

Exemple : soit  $x$  un rationnel tel que :  $x < 3$  comparons  $-2$  et  $x - 5$  .

On a  $x < 3$  donc  $x + (-5) < 3 + (-5)$  soit  $x - 5 < 3 - 5$  d'où  $x - 5 < -2$

Exemple :  $x$  et  $y$  deux rationnels tels que  $x < 3$  et  $2 > y$ .

Démontrons :  $x + y < 5$ .

$$\text{On a } \left. \begin{array}{l} x < 3 \\ 2 > y \end{array} \right\} \text{ d'où } \left. \begin{array}{l} x < 3 \\ y < 2 \end{array} \right\} \text{ soit } x + y < 2 + 3 \text{ donc } x + y < 5$$

## 2) Ordre et multiplication (division).

### a) Regle 3 :

*Soit trois nombres  $a, b,$  et  $c$  désignent des nombres rationnels*

*Si  $a \leq b$  et  $c > 0$  alors  $a \times c \leq b \times c$*

*Si  $a \leq b$  et  $c < 0$  alors  $a \times c \geq b \times c$*

*Si  $a \leq b$  alors  $-a \geq -b$*

*soit quatre nombres  $a, b, c$  et  $d$  désignent des nombres rationnels positifs*

*Si  $a \leq b$  et  $c \leq d$  alors  $ac \leq bd$*

Exemple : On a  $11 \leq 27$  et  $0 \leq 5$  donc  $11 \times 5 \leq 27 \times 5$

On a :  $11 \leq 27$  et  $-4 \leq 0$  donc  $11 \times (-4) \geq 27 \times (-4)$

Exemple :  $x$  et  $y$  deux rationnels tels que :  $x < 0,5$  et  $y < 6$ .

Démontrons que :  $xy < 3$ .

On a :  $x < 0,5$  et  $y < 6$  soit  $x \times y < 0,5 \times 6$  d'où  $xy < 3$ .

### 3) ORDRE ET INVERSE :

#### a) Règle 4 :

*$a$  et  $b$  désigne deux nombres rationnels strictement positifs.*

*$a \leq b$  signifie  $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$  c-a-d (si  $a \leq b$  alors  $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ ) et (si  $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$  alors  $a \leq b$ )*

b) Exemple1 : on a  $7 \leq 13$  donc  $\frac{1}{7} \geq \frac{1}{13}$  et  $11 \geq 5$  donc  $\frac{1}{11} \leq \frac{1}{5}$

### 4) ORDRE ET CARRE

#### a) Regle5 :

*$a$  et  $b$  désignent deux nombres rationnels*

*Si  $a \geq 0$  et  $b \geq 0$  et  $a \leq b$  alors  $a^2 \leq b^2$ .*

*Si  $a \leq 0$  et  $b \leq 0$  et  $a \leq b$  alors  $a^2 \geq b^2$ .*

b) Exemple1 : on a  $-7 \leq -2$  donc  $(-7)^2 \geq (-2)^2$  d'ou.  $49 \geq 16$

## III. ENCADREMENTS.

### 1. Encadrement d'une somme

Exemple :  $x$  et  $y$  deux nombres rationnels tels que :  $3 \leq x \leq 8$  et  $-4 \leq y \leq 2$

**Encadrement de  $x + y$**  : On a :  $3 + (-4) \leq x + y \leq 8 + 2$  donc  $-1 \leq x + y \leq 10$

### 2. Encadrement d'une différence

Remarque :  $a - b = a + (-b)$

$x$  et  $y$  deux rationnels tels que :  $3 \leq x \leq 8$  et  $-4 \leq y \leq 2$

**Encadrement**  $x - y$  : On a :  $-2 \leq -y \leq 4$  et  $3 \leq x \leq 8$

Donc  $3 - 2 \leq x + (-y) \leq 8 + 4$  d'où  $1 \leq x - y \leq 12$

### 3. Encadrement d'un produit

**Exemple 1** :  $x$  et  $y$  deux rationnels tels que  $3 \leq x \leq 7$  et  $1 \leq y \leq 3$

**Encadrement**  $x \times y$  : On a :  $3 \leq x \times y \leq 21$  donc  $3 \times 1 \leq x \times y \leq 7 \times 3$

**Exemple 2** :  $x$  et  $y$  deux rationnels tels que  $-5 \leq x \leq -2$  et  $3 \leq y \leq 6$

**Encadrement de**  $x \times y$  .

On a  $2 \leq -x \leq 5$  donc  $2 \times 3 \leq (-x) \times y \leq 5 \times 6$  soit  $6 \leq -xy \leq 30$  d'où  $-30 \leq xy \leq -6$ .

### 4. Encadrement d'un quotient

**Remarque** :  $\frac{a}{b} = a \times \frac{1}{b}$   $x$  et  $y$  deux rationnels tels que  $3 \leq x \leq 7$  et  $5 \leq y \leq 9$

**Encadrement de**  $\frac{x}{y}$  :

On a :  $\frac{1}{9} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{5}$  donc  $3 \times \frac{1}{9} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 7 \times \frac{1}{5}$  soit  $\frac{3}{9} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{7}{5}$  d'où  $\frac{1}{3} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{7}{5}$

## IV. INEQUATIONS :

### 1) DEFINITION 1 :

**On appelle inéquation une inégalité entre deux expressions algébriques.**

1) **Exemple** :  $6x \leq 15$  ;  $2x + 5 \geq -x + 11$  ;  $-3x - 2(x - 1) > 1 - x$  ;  $-\frac{3x}{5} > 1 - x$

Sont des inéquations.

### 2) Définitions 2 :

Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs que l'on peut donner à l'inconnue pour que l'inégalité soit vraie. Ces valeurs sont les solutions de l'inéquation.

### 3) Propriété :

**On considère l'inéquation**  $ax \geq b$

**Si**  $a > 0$  **Alors**  $x \geq \frac{b}{a}$  **et si**  $a < 0$  **Alors**  $x \leq \frac{b}{a}$

4) **Exemple** : Résoudre :  $3x + 7 \leq -2$

Donc :  $3x \leq -9$  (on a ajouté  $-7$  aux deux membres)  $x \leq -3$  (on a divisé les deux membres par

les solutions de l'inéquation sont les nombres réels inférieurs ou égal à  $-3$