# SYSTEME D'EQUATIONS

Cours de maths BAFDILI — Bafdili.com — LE COMMENCEMENT EST LA MOITIÉ DE TOUT

## I. RESOLUTION D'UN SYSTEME DE DEUX EQUATIONS A DEUX INCONNUES :

### 1) Définition :

*Un système de deux équations à deux inconnues est constitué de deux égalités contenant chacune deux inconnues, souvent notées $x$ et $y$. Une solution d'un système est donc constituée de deux nombres (une valeur pour $x$ et une valeur pour $y$), tels que les égalités soient vérifiées.*

### 2) Exemple :

*Résoudre le système suivant :* $\begin{cases} -x+2y=4 \\ -2x+y=5 \end{cases}$

*C'est un système de deux équations à deux inconnues :* $x$ *et* $y$.

## II. RESOLUTION D'UN SYSTEME :

### 1) Systèmes et résolution graphique :

*Exemple :* *Résoudre graphiquement le système* : $\begin{cases} -x+2y=4 \\ -2x+y=5 \end{cases}$

*L'ensemble des solutions de chaque équation est représenté par une droite.*
*Le couple solution du système correspond aux coordonnées du point d'intersection des deux droites.*

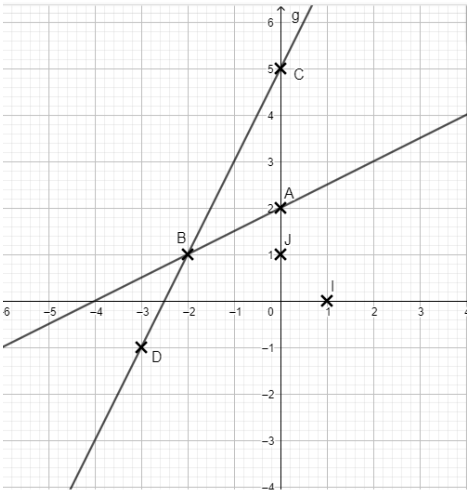
*Pour le système :* $\begin{cases} -x+2y=4 \\ -2x+y=5 \end{cases}$

*La représentation graphique de* $-x+2y=4$ *est une droite d'équation* $y=\frac{1}{2}x+2$.

*Si* $x=0$ *alors* $y=\frac{1}{2}\times 0+2=0+2=2$ *et si* $x=-2$ *alors*

$y=\frac{1}{2}\times(-2)+2=-1+2=1$

| $x$ | 0 | 2 | -2 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 2 | 3 | 1 |




*La représentation graphique de* $-2x+y=5$ *est une droite d'équation* $y=2x+5$.
*Si* $x=0$ *alors* $y=2\times 0+5=0+5=5$ *et si* $x=-2$ *alors*
$y=2\times(-2)+5=-4+5=1$.

*Nous avons représenté graphiquement les deux droites :*

| $x$ | 0 | -3 | -2 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 5 | -1 | 1 |

*Le système semble avoir pour solution le couple* $(-2;1)$.

### 2) Systèmes et résolution algébrique :

#### a) Méthode de substitution :

*Procédé* :

*Pour résoudre un système par la méthode de substitution, on exprime une des inconnues en fonction de l'autre dans la première équation, et on remplace cette inconnue par sa nouvelle expression dans la seconde équation. Cette seconde équation*

*ne présente ainsi plus que la seconde inconnue, qu'il est alors possible de déterminer. Il ne reste enfin plus qu'à remplacer la seconde inconnue par sa valeur dans la première équation, pour en déduire la première inconnue.*
*On utilise de préférence la méthode de substitution lorsque l'une des inconnues a pour coefficient 1 ou -1.*

*Exemple :* *Pour le système* $\begin{cases} -x+2y=4 \\ -2x+y=5 \end{cases}$

*On exprime l'une des inconnues en fonction de l'autre dans l'une des équations.* $\begin{cases} -x+2y=4 \\ y=2x+5 \end{cases}$

1) *On remplace l'inconnue dans l'autre équation.* $\begin{cases} -x+2(2x+5)=4 \\ y=2x+5 \end{cases}$

   *Elle devient une équation du 1er degré à une seule inconnue :* $-x+2(2x+5)=4$.
2) *On résout la nouvelle équation :*
   $\begin{cases} -x+2(2x+5)=4 \\ y=2x+5 \end{cases}$ soit $\begin{cases} -x+4x+10=4 \\ y=2x+5 \end{cases}$ alors $\begin{cases} 3x+10=4 \\ y=2x+5 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x=-2 \\ y=2\times(-2)+5=1 \end{cases}$.
3) *On conclut : Le couple solution est (-2 ; 1).*

b) *Méthode de combinaison :*

*Procédé* :
*Pour résoudre un système par la méthode des combinaisons, on multiplie les deux membres d'une équation par un nombre choisi judicieusement, de sorte qu'en additionnant membre à membre les deux équations, une des inconnues disparaisse. On obtient ainsi une équation à une inconnue, qu'il est alors possible de déterminer. Il ne reste enfin plus qu'à remplacer cette inconnue par sa valeur dans une des deux équations, pour en déduire l'autre inconnue.*
*On utilise, de préférence, la méthode de combinaison dans tous les autres cas.*

*Exemple :* *Pour le système* $\begin{cases} -x+2y=4 \\ -2x+y=5 \end{cases}$

*Méthode de combinaison et exemple :*

1) *On multiplie chaque équation par un nombre afin que les coefficients de* $x$ *(ou de* $y$ *) soient les mêmes.* $\begin{cases} -x+2y=4 \\ 4x-2y=-10 \end{cases}$
2) *On ajoute ou on soustrait terme à terme les 2 équations pour éliminer y.*

$$-x+2y+(4x-2y)=4+(-10)$$

3) *On obtient une équation du 1er degré à 1 inconnue que l'on résout :*

$$-x+2y+4x-2y=-6 \text{ soit } 3x=-6 \text{ d'ou } x=-2$$

4) *On remplace l'inconnue « connue » dans la 1ère équation puis on calcule*

$$-x+2y=4 \text{ donc } 2+2y=4 \text{ soit } 2y=4-2 \text{ alors } y=1$$

5) *On conclut : Le couple solution est* $(-2;1)$.

## III. EXEMPLE DE RESOLUTION D'UN PROBLEME

***Enoncé :***

*Pour classer des photos, un magasin propose deux types de rangement : des albums ou des boîtes. Rim achète 6 boîtes et 5 albums et paie 57 0 Dhs. Lina achète 3 boîtes et 7 albums et paie 555 Dhs. Quel est le prix d'une boîte ? Quel est le prix d'un album ?*

***Réponse :***

*Etape 1 : choix des inconnues Appelons* $x$ *le prix d'une boîte et* $y$ *le prix d'un album.*

*Etape 2 : mise en équations*

*Traduction de la première phrase:* $6x+5y=570$.

*Traduction de la deuxième phrase:* $3x+7y=555$

*Etape 3 : Résolution du système:* $\begin{cases}6x+5y=570\\3x+7y=555\end{cases}$

*En multipliant la deuxième équation par 2, on obtient le système :* $\begin{cases}6x+5y=570\\6x+14y=1110\end{cases}$

*On soustrait membre à membre les deux égalités*

$6x+5y-(6x+14y)=570-1110$ soit $6x+5y-6x-14y=-540$ d'ou $-9y=-540$ et $y=60$.

*On remplace* $y$ *par 60 dans la première équation :*

$6x+5\times60=570$ alors $6x+300=570$ d'ou $6x=570-300$ donc $6x=270$ et $x=45$

*Vérification :* $\begin{cases}6x+5y=6\times45+5\times60=270+300=570\\3x+7y=3\times45+7\times60=135+420=555\end{cases}$

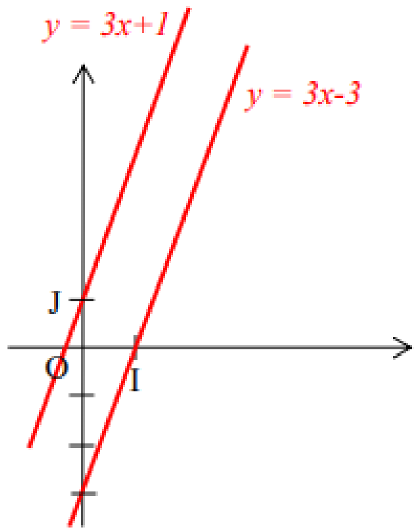
*Conclusion: (45;60) est la seule solution du système.*

*Etape 4 : Retour au problème posé Une boîte coûte 45 Dhs et un album coûte 60 Dhs.*

## IV. CAS PARTICULIERS:

### 1) Exemple d'un système n'admettant pas de solution :

*Soit le système* $(S)$ *tel que:* $\begin{cases}-3x+y=1\\6x-2y=6\end{cases}$




***Résolution du système :***

*En isolant* $y$ *dans la première équation, on a:* $y=3x+1$ *En remplaçant* $y$ *dans la deuxième équation, on a :* $6x-2(3x+1)=6$ *Soit :* $6x-6x-2=6$ *Soit encore :* $-2=6$. *On a abouti à une contradiction. Les deux équations du système* $(S)$ *ne peuvent pas être vérifiées simultanément par un couple de nombres réels* $(x\ ;\ y)$. *Le système* $(S)$ *ne possède donc pas de solution.*

***Interprétation géométrique :***

*Le système* $(S)$ *équivaut à* $\begin{cases}y=3x+1\\y=3x-3\end{cases}$

*Les droites d'équations* $y=3x+1$ *et* $y=3x-3$ *possèdent des coefficients directeurs égaux, elles sont donc strictement parallèles. Il n'existe pas de couple de nombres réels* $(x\ ;\ y)$ *vérifiant simultanément les équations des deux droites.*

## 2) *Exemple d'un système admettant une infinité de solutions :*

*Soit le système* $(S)$ *tel que:* $\begin{cases} -3x+\ y=1 \\ 6x-2y=-2 \end{cases}$

*Résolution du système :*

*Le système* $(S)$ *équivaut à* $\begin{cases} y=3x+1 \\ y=3x+1 \end{cases}$

*Tous les couples* $(x\ ;\ y)$ *vérifiant l'équation* $y=3x+1$ *sont solutions du systèmes* $(S)$.

*Pour* $x=-2$ *par exemple,* $y=3(-2)+1=-6+1=-5$. *Le couple* $(-2;-5)$ *est solution.*

*Il existe une infinité de couples de nombres réels* $(x\ ;\ y)$ *vérifiant l'équation* $y=3x+1$.

*Le système* $(S)$ *possède donc une infinité de solutions.*

*Interprétation géométrique:*
*Les droites associées à ces deux équations sont confondues.*