FONCTIONS LINEAIRES ET FONCTIONS AFFINES

I. FONCTIONS LINEAIRES :

1) Définitions et notations

Soit a un nombre fixé.
En associant à chaque nombre « x » un nombre « ax » appelé image de x, on définit une fonction linéaire de coefficient a.
On notera cette fonction $f : x \mapsto ax$
L'image de x sera notée : $f(x)$.

2) Remarque :

La fonction linéaire f traduit une situation de proportionnalité, et le nombre a est appelé le coefficient de proportionnalité.

3) Exemple 1:

Soit f la fonction linéaire de coefficient 2. On la note $f : x \mapsto 2x$

Alors l'image de 3 est $f(3) = 2\times3 = 6$.

L'image de -2 est $f(-2) = 2\times(-2) = -4$.

Le nombre qui a pour image 10 par f est $x = 10 \div 2 = 5$

4) Remarque :

On peut regrouper ces résultats dans un tableau :

x	3	-2	5
$f(x)$	6	-4	10

C'est un tableau de proportionnalité et le coefficient de proportionnalité est 2.

5) Exemple 2 :

Soit g la fonction linéaire telle que $g(7) = -21$.

Quel est le coefficient de g ?

On a : $g : x \mapsto ax$

On veut determiner a. $g(7) = -21$. Donc si $x = 7$, alors $ax = -21$

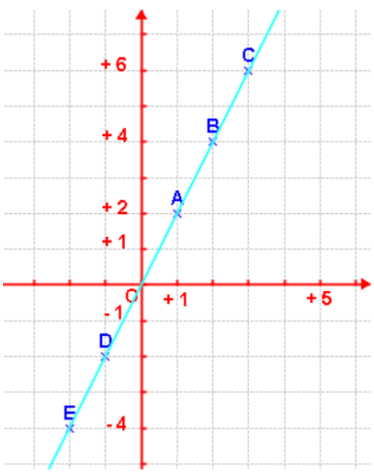
$7a = -21$ *implique* $a = -21 \div 7 = -3$. *Le coefficient de g est (-3) et* $g : x \mapsto -3x$

6) Représentation graphique d'une fonction linéaire

a) Propriété :

La représentation graphique de la fonction f est l'ensemble de tous les points M de coordonnées $(x\,;\,f(x))$ obtenus en prenant toutes les valeurs possibles de x.

b) Activité : *Observation f est la fonction linéaire : $f : x \mapsto 2x$*



1) Calculons : $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$; $f(-1)$; $f(-2)$.

$f(0) = 2\times0 = 0$. *Le point $f(0) = 2\times0 = 0$ est l'origine du repère.*

$f(1) = 2\times1 = 2$; $f(2) = 2\times2 = 4$; $f(3) = 2\times3 = 6$

$f(-1) = 2\times(-1) = -2$; $f(-2) = 2\times(-2) = -4$

2) Dans le repère ci-contre, plaçons les points :

$A\,(1\,;\,f(1))$; $B\,(2\,;\,f(2))$; $C\,(3\,;\,f(3))$

$D(-1\,;\,f(-1))$; $E\,(-2\,;\,f(-2))$.

3) Qu'observe-t-on ?

Les points E, D, O, A, B et C semblent alignés.

c) Propriétés :

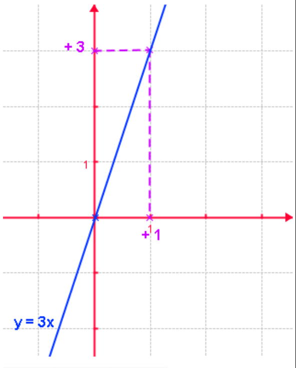
La représentation graphique d'une fonction linéaire $f : x \mapsto ax$ est la droite d'équation $y = ax$.
Elle passe par l'origine du repère et par le point $(1; a)$.

d) Remarque :

Pour la construire, il suffit de connaître un point (abscisse x et son image $f(x)$).

e) Définition :

a est le coefficient directeur de la droite (d).



f) Propriété réciproque :

Toute droite passant par l'origine est la représentation graphique d'une fonction linéaire.

a) Exemple :

Soit g la fonction linéaire de coefficient 3.
On la note $g : x \mapsto 3x$.
Sa représentation graphique est une droite passant par l'origine.
$g(0) = 0$ *et* $g(1) = 1 \times 3 = 3$

II. DEFINITIONS ET NOTATIONS DE FONCTIONS AFFINES :

1) Définition :

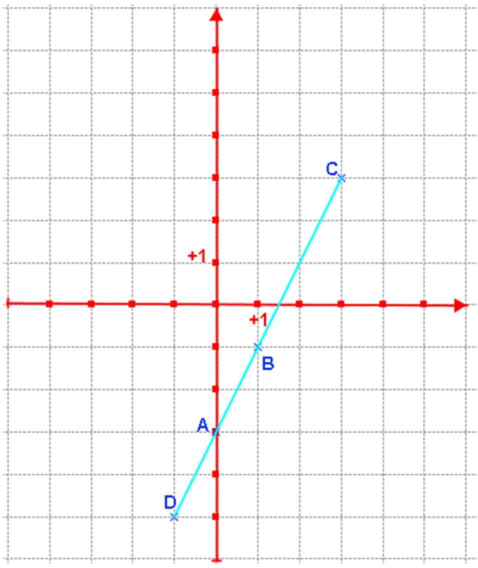
Soit a et b deux nombres fixés.
En associant à chaque nombre «x» un nombre «$ax + b$» appelé image de x, on définit une fonction affine f.
On notera cette fonction $f : x \mapsto ax + b$
L'image de x sera notée $f(x)$.

2) Remarque :

♦ *Une fonction linéaire est une fonction affine particulière.*
En effet, $f : x \mapsto ax$ peut s'écrire $f : x \mapsto ax + 0$
♦ *$f : x \mapsto ax + b$ est une fonction affine,*
$g : x \to a\,x$ est la fonction linéaire associée à f.

3) Exemple :

Soit f la fonction affine définie par $f : x \to 2x + 3$
Alors l'image de (-2) est $f(-2) = 2 \times (-2) + 3 = -4 + 3 = -1$
L'image de 1 est $f(1) = 2 \times 1 + 3 = 2 + 3 = 5$
Le nombre qui a pour image 7 par f
est $2x + 3 = 7$ soit $2x = 7 - 3$ alors $x = 2$:
Le nombre qui a pour image 7 par f est 2.



4) Remarque :

On peut regrouper ces résultats dans un tableau :

x	-2	1	2
$f(x)$	-1	5	7

5) Représentation graphique de fonctions affines

a) Propriété :

La représentation graphique de la fonction f est l'ensemble de tous les points M de coordonnées $(x \,;\, f(x))$ obtenus en prenant toutes les valeurs possibles de x.

b) Activité : observation

f est la fonction affine : $f : x \mapsto 2x - 3$.

1) Calculons : $f(0)$; $f(1)$; $f(3)$; $f(-1)$.

$f(0) = 2\times 0-3=-3$; $f(1)=2\times 1-3=2-3=-1$

$f(3)=2\times 3-3=6-3=3$; $f(-1)=2\times(-1)-3=-2-3=-5$

2) Dans le repère ci - contre, plaçons les points :

$A\left(0\,;f(0)\right)$; $B\left(1\,;f(1)\right)$; $C\left(3\,;f(3)\right)$; $D\left(-1\,;f(-1)\right)$.

3) Qu'observe-t-on ?

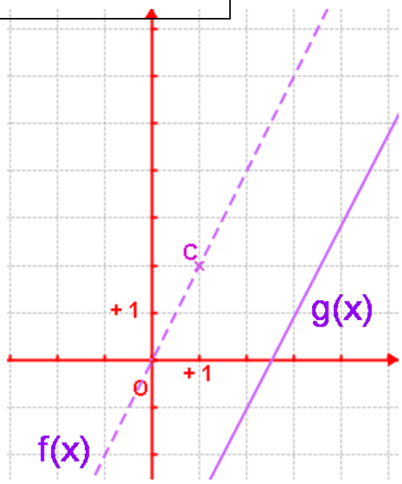
Les points A, B, C et D semblent alignés.

c) Propriétés :

> ***La représentation graphique d'une fonction affine $f: x\mapsto ax+b$ est une droite d'équation $y=ax+b$***
> ***Cette droite est parallèle à la droite représentant la fonction linéaire associée et passe par le point $(0\,;\,b)$.***

d) Remarque :

Pour la construire, il suffit de connaître deux points (abscisses x et leurs images $f(x)$).



e) Définitions :

a est le coefficient directeur de la droite (d) ; b est l'ordonnée à l'origine.

f) Exemple :

Soit g la fonction affine définie par $g: x\mapsto 2x-5$.

Sa représentation graphique est une droite.

$g(0)=-5$ et $g(1)=2\times 1-5=2-5=-3$

La fonction linéaire associée à g est : $f: x\mapsto 2x$.

6) Coefficient d'une fonction affine :

a) Propriété :

> ***Si $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ sont deux points de la droite (d) représentant la fonction f définie par $f(x)=ax+b$ alors : $a=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$***

b) Conséquence :

f est une fonction affine de la forme $f(x)=ax+b$.

Si x_1 et x_2 sont deux nombres tels que $x_1\neq x_2$, alors : $a=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

c) Exercice :

Déterminer la fonction affine f vérifiant : $f(2)=4$ et $f(5)=1$

f est une fonction affine de la forme $f(x)=ax+b$

Déterminer f revient à trouver a et b.

On applique la propriété pour trouver le coefficient directeur a : $a=\dfrac{f(2)-f(5)}{2-5}=\dfrac{4-1}{2-5}=\dfrac{3}{-3}=-1$

donc : $f(x)=-x+b$

Or, par exemple : $f(5)=1$. Donc : $-5+b=1$. Soit : $b=1+5=6$ D'où : $f(x)=-x+6$.