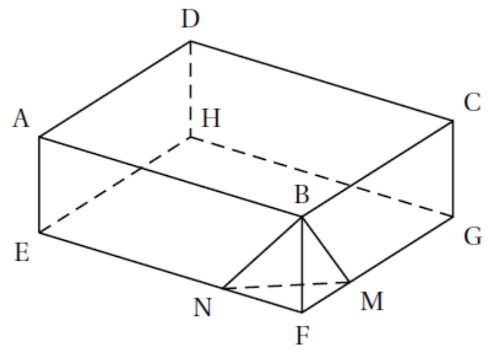
SERIE 11 CORRECTION GEOMETRIE DANS L'ESPACE

EXERCICE 1 :



On considère le parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$.
M est un point de $[FG]$ et N un point de $[EF]$.

On donne :
$FE = 15\ cm$; $FG = 10\ cm$; $FB = 5\ cm$; $FN = 4\ cm$; $FM = 3\ cm$.

1) Démontrer que l'aire du triangle FNM est égal à $6\ cm^2$.
2) Calculer le volume de la pyramide de sommet B et de base le triangle FNM.

   On rappelle que le volume d'une pyramide : $V = \frac{1}{3} B \times h$ où B est l'aire de la base et h la hauteur de la pyramide.
3) On considère le solide $ABCDENMGH$ obtenu en enlevant la pyramide précédente au parallélépipède rectangle.
   a) Calculer son volume.
   b) On appelle caractéristique d'Euler d'un solide le nombre $FE = 15\ cm\ x$ tel que :
   $x = \text{nombre de faces} - \text{nombre d'arêtes} + \text{nombre de sommets}$

CORRECTION :

1) Etant donné que $ABCDEFGH$ est un parallélépipède rectangle, le triangle FNM est rectangle en F. Le calcul de l'aire du triangle FNM donne :

$$A_{FNM} = \frac{1}{2} base \times hauteur = \frac{1}{2} FN \times FM = \frac{1}{2} \times 4 \times 3 = 6 cm^2$$

2) Calcul du volume de la pyramide BFNM :

$$V_{BFNM} = \frac{1}{3} \text{Aire de la base } FNM \times hauteur = \frac{1}{3} A_{FNM} \times FB = \frac{1}{3} \times 6 \times 5 = 10 cm^3$$

Le volume de la pyramide BFNM est de 10 cm³.

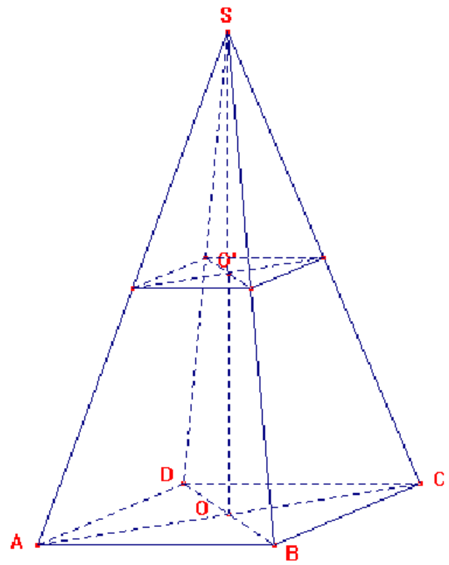
3) a) Calcul du volume du parallélépipède rectangle ABCDEFGH :

$$V_{ABCDEFGH} = L \times l \times h = FE \times FG \times FB = 15 \times 10 \times 5 = 750 cm^3$$

Le volume du parallélépipède rectangle ABCDEFGH est de 750 cm³. On en déduit le volume du solide ABCDENMGH : $V_{ABCDENMGH} = V_{ABCDEFGH} - V_{BFNM} = 750 - 10 = 740 cm^3$

Le volume du solide ABCDENMGH est de 740 cm³.

EXERCICE 2 :



Pour la pyramide $SABCD$ ci-contre :
La base est le rectangle $ABCD$ de centre O, $AB = 3\ cm$ et $BD = 5cm$.
La hauteur $[SO]$ mesure $6cm$.

1) Montrer que $AD = 4\ cm$.
2) Calculer le volume de la pyramide $SABCD$ en cm^3.

   Soit O' le milieu de $[SO]$. On coupe la pyramide par un plan passant par O' et parallèle à sa base.

   a) Quelle est la nature de la section $A'B'C'D'$ obtenue ?
   b) La pyramide $SA'B'C'D'$ est une réduction de la pyramide $SABC$. Donner le rapport de cette réduction.
   c) Calculer le volume de la pyramide $SA'B'C'D'$.

CORRECTION :

On a: $AB = 3cm$; $BD = 5cm$; $SO = 6cm$

Montrons que: $AD = 4$.

ABD triangle rectangle en A car $ABCD$ rectangle

D'après le Théorème direct de Pythagore on a: $AD = \sqrt{BD^2 - AB^2} = \sqrt{25-9} = \sqrt{16} = 4$

2) Calculons le volume de la pyramide On a : $V_{SABCD} = AB \times AD \times SO = 3\times4\times6 = 24\ cm^3$

3) O' milieu de $[SO]$

a) Déterminons la nature de $A'B'C'D'$.

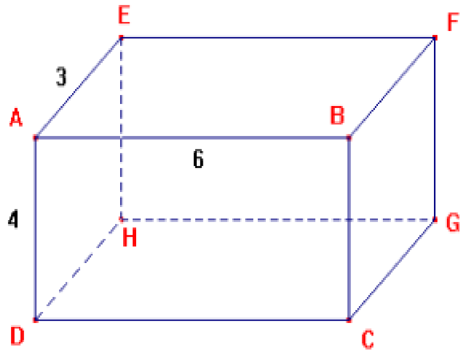
On a : $(A'B'C'D')$ parallèle à $(ABCD)$ donc : $A'B'C'D'$ est un rectangle.

b) Calculons le rapport de la réduction : D'après le Théorème de Thalès on a: $k = \frac{SD'}{SD} = \frac{SO'}{SO} = \frac{1}{2}$

c)Calculons le volume de la petite pyramide est :$V_{SA'B'C'D'} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times V_{SABCD} = \frac{24}{8} = 3cm^3$.

EXERCICE 3 :

$ABCDEFGH$ ***est un parallélépipède rectangle. On donne*** $AE = 3\ m$; $AD = 4\ m$; $AB = 6\ m$ ***.***



1) a) Que peut-on dire des droites (AE) ***et*** (AB) ***? Le justifier,***

b) Les droites (EH) ***et*** (AB) ***sont-elles sécantes ?***

2) Calculer EG ***et*** EC.

3) Montrer que le volume de $ABCDEFGH$ ***est égal à*** $72\ m^3$ ***.***

4) Montrer que l'aire totale de $ABCDEFGH$ ***est égale à*** $108\ m^2$ ***.***

CORRECTION :

1) a) On a : (AE) et (AB) sont sécantes elles sont coplanaire elles determinele plan (AEB).

b) Les droites (EH) et (AB) ne sont pas sécantes elles sont orthogonales on a :

$(AB) \parallel (EF)$ et $(EF) \perp (EH)$.

2) a) EHG est un triangle rectangle en H, d'après théorème directe de Pythagore on a :

$EG = \sqrt{HE^2 + HG^2} = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

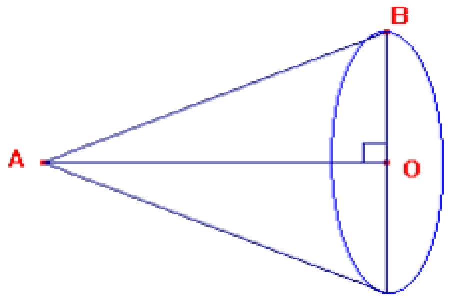
b) On a : $EH = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AE^2} = \sqrt{36+16+9} = \sqrt{61}$

3) On a : $V = AB \times AD \times AE = 6\times4\times3 = 72\ m^3$.

On a : $S = 2(AE \times AD + AB \times AD) + 2AB \times EF = 2(12+24) + 2\times18 = 72+36 = 108m^2$.

EXERCICE 4 :

On considère un cône de révolution semblable à celui qui est représenté ci-contre avec : $OA = 4cm$ ***et*** $OB = 3cm$.



1) Calculer la longueur de la génératrice $[AB]$.

2) Calculer le volume du cône.

CORRECTION :

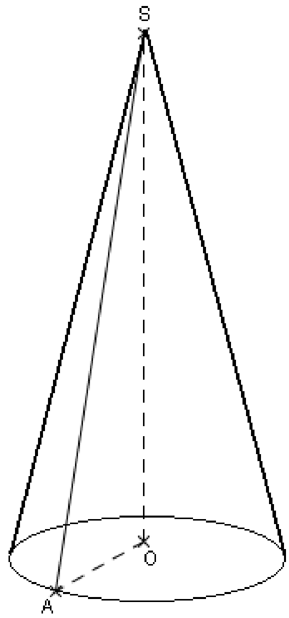
1) Calculons la longueur de la génératrice: $[AB]$.

Le triangle AOB étant rectangle en O, d'après le théorème de Pythagore nous avons :

$AB^2 = AO^2 + OB^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$; $AB = \sqrt{25} = 5$ donc : $AB = 5cm$.

2) Calculons le volume du cône: $V = \frac{1}{3}\pi \times OB^2 \times OA = \frac{1}{3}\pi \times 3^2 \times 4 = 12\pi cm^3$.

EXERCICE 5:



1) On considère une bougie conique représentée ci-contre. (La figure n'est pas aux dimensions réelles.) Le rayon OA de sa base est 2,5 cm.
La longueur du segment [SA] est 6,5 cm.
Sans justifier, donner la nature du triangle SAO et le construire en vraie grandeur.

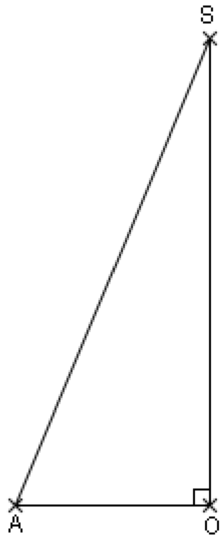
2) Montrer que la hauteur SO de la bougie est 6 cm.

3) Calculer le volume de cire nécessaire à la fabrication de cette bougie ; on donnera la valeur arrondie au dixième de cm³ ?

CORRECTION :

1) Le triangle SAO est rectangle en O.

On trace le segment [AO] mesurant 2,5 cm, puis la perpendiculaire à (OA) passant par O. Avec un compas, prendre un écartement de 6,5 cm. Pointe sèche en A et arc de cercle coupant la perpendiculaire à (OA) en S. Tracer le côté [AS].



2) Le triangle SAO est rectangle en O ; on peut donc utiliser le théorème de Pythagore et écrire l'égalité suivante

On a: $AO^2 + OS^2 = AS^2$ soit $OS^2 = AS^2 - AO^2 = 6,5^2 - 2,5^2 = 42,25 - 6,25 = 36$

d'ou $OS = \sqrt{36} = 6\ cm$.

3) Calcul du volume :

$V = \frac{1}{3} \text{Aire de la base} \times \text{hauteur} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \times AO^2 \times OS = \frac{1}{3}\pi \times (2,5)^2 \times 6 = 12,5\pi\, cm^3$

Le volume de la bougie est de $V = 39,3\ cm^3$.