SERIE 3 CORRECTION
VECTEURS ET TRANSLATION

EXERCICE 1 :

Soit $ABCD$ ***un parallélogramme***

Simplifier : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$; $\vec{v} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{DB}$; $\vec{w} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD}$.

CORRECTION :

Simplifions :

On a : $ABCD$ *un parallélogramme signifie que :* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ *et* $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$

$\vec{v} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB} - 2\overrightarrow{DB} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{DB} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.$

$\vec{w} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.$

EXERCICE 2 :

A , B ***et*** C ***des points du plan tels que :*** $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BC} = \vec{0}$

Montrer que les points A , B ***et*** C ***sont alignées.***

CORRECTION :

On a : $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BC} = \vec{0}$ *signifie que :* $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} - 3\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) = \vec{0}$

soit : $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ *donc :* $\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

d'ou : $(1+3)\overrightarrow{AB} + (-2-3)\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ *et :* $4\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AC} = \vec{0}$ *alors :* $4\overrightarrow{AB} = 5\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AC}$ *alors les points* A, B *et* C *sont alignées.*

EXERCICE 3 :

1) A, B, C, D ***quatre points. Montrer que :*** $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.
2) E, F, G, H ***quatre points tels que:*** $\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GE} - \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HG}$.

Montrer que: F et H ***sont confondus***

CORRECTION :

1) *On a :* $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}.$

2) *On a :*

$\overrightarrow{FE} + \overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GF} = \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{HE}.$

$\overrightarrow{GE} - \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HF}.$

On a : $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HF}$ *donc* $\overrightarrow{HF} = \vec{0}$ *soit* $H = F$

EXERCICE 4 :

A, B, C, D ***quatre points du plan tels que:*** $2\overrightarrow{BC} - 9\overrightarrow{AC} - 7\overrightarrow{DA} = \vec{0}$.

Montrer que : $(AB)//(DC)$.

CORRECTION :

On a : $2\overrightarrow{BC} - 9\overrightarrow{AC} - 7\overrightarrow{DA} = \vec{0}$ *signifie que :* $2\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC} - 7\overrightarrow{AC} - 7\overrightarrow{DA} = \vec{0}$

soit $2\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}\right) - 7\left(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}\right) = \vec{0}$ *alors* $2\overrightarrow{BA} - 7\overrightarrow{CD} = \vec{0}$

donc $-2\overrightarrow{AB} + 7\overrightarrow{DC} = \vec{0}$ *et* $-2\overrightarrow{AB} = -7\overrightarrow{DC}$. *alors* $\overrightarrow{AB} = \frac{7}{2}\overrightarrow{DC}$ *d'ou* $(AB)//(DC)$.

EXERCICE 5 :

A, B, C, D ***quatre points du plan tels que:*** $5\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AD}$. .

Montrer que : les points B, C, D ***sont alignés.***

CORRECTION :

On a: $5\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AD}$ signifie que: $5\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AD}=\vec{0}$

$3\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AD}=\vec{0}$ alors $3\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{DA}=\vec{0}$

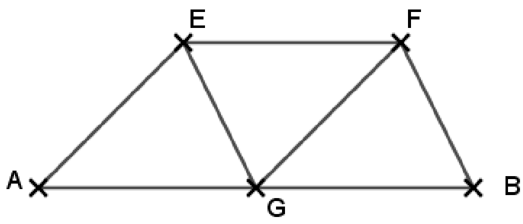
soit $3\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)+2\left(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}\right)=\vec{0}$ alors $3\overrightarrow{CB}+2\overrightarrow{DB}=\vec{0}$

donc $3\overrightarrow{CB}=-2\overrightarrow{DB}$ alors $\overrightarrow{BC}=-\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$ donc les points B,C,D sont alignés.

EXERCICE 6 :

EFG ***est un triangle.***

1) ***Construire le point*** A ***tel que :*** $\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{FG}$.
2) ***Construire le point*** B ***tel que :*** $\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{EG}$.
3) ***Montrer que les point*** G ***est le milieu de*** $[AB]$.



CORRECTION :

1) $\overrightarrow{EA}=\overrightarrow{FG}$ signifie que $EAGF$ est un parallélogramme.

2) $\overrightarrow{FB}=\overrightarrow{EG}$ signifie que $FBGE$ est un parallélogramme.

3) Montrons que les points G est le milieu de $[AB]$.

$EAGF$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{EF}\ (1)$

$FBGE$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{BG}$ soit $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{GB}\ (2)$

De (1) et (2) on en déduit que: $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{GB}$ donc G est le milieu de $[AB]$.

EXERCICE 7 :

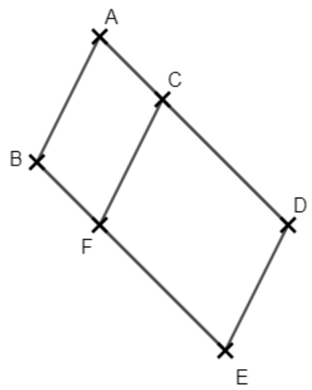
Soit le triangle ABC .

1) ***Construire les points*** E ***et*** F ***tels que :***

   $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$ ***et*** $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

2) ***Montrer que*** B , E ***et*** F ***sont alignés.***

3) ***Montrer que*** F ***est l'image de*** C ***par la translation qui transforme*** A ***en.*** B



CORRECTION :

1) Voir figure ci-contre.

2) Montrons que les points B, E et F sont alignés.

$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BB}+3\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{BE}=3\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{BF}$ alors les points B, E et F sont alignés.

3) Montrer que F est l'image de C par la translation qui transforme A en B.

$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}$. Donc F est l'image de C par la translation qui transforme A en B.

EXERCICE 8 :

$ABCD$ ***parallélogramme . Soit*** E ***le milieu de*** $[AD]$

Et les points M ***et*** N ***tels que:*** $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ ***et*** $\overrightarrow{DN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$.

Montrer que les droites (BE) ***et*** (MN) ***sont parallèles.***

CORRECTION :

Montrer que les droites (BE) et (MN) sont parallèles.

$ABCD$ un parallélogramme signifie que: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ *et* $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

E milieu de $[AD]$ signifie que: $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{ED}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DN}=-\overrightarrow{CM}-\overrightarrow{DC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{MN}=-\frac{1}{3}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{2}{3}\left(-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)=\frac{2}{3}\overrightarrow{BE}$$

Donc: les droites (BE) et (MN) *sont parallèles.*